

Curriculum di studi di
Ludovico Pernazza

Sono nato a Roma il 15 gennaio 1971.

1990-1994	Sono stato allievo ordinario della Scuola Normale Superiore di Pisa, seguendo vari corsi interni alla Scuola e sostenendo un colloquio sul tema <i>I fondamenti della Meccanica Quantistica ed il paradosso EPR</i>
1995-1997	Sono stato allievo del Corso di Perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore di Pisa
1998-2001	Ho frequentato il Corso di Dottorato in Matematica presso l'Università di Pisa
ottobre 2001 – settembre 2002	Ho usufruito di una borsa di studio annuale presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa nell'ambito del programma di ricerca "Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse"
da ottobre 2002	Sono Ricercatore presso l'Università degli studi di Pavia

Attività scientifica

Mi sono principalmente occupato di argomenti di Geometria Reale, sia dal punto di vista algebrico che geometrico, e di Equazioni differenziali alle derivate parziali.

Durante la preparazione della tesi di laurea ho affrontato il problema della decidibilità per un problema di separazione di semialgebrici. Ho dimostrato che esiste un algoritmo di cui si possono calcolare i tempi di fermata per stabilire se due semialgebrici in una varietà di dimensione due sono separabili o meno (cioè se esiste una funzione polinomiale che sia negativa su uno e positiva sull'altro, a meno della chiusura di Zariski dell'intersezione delle chiusure dei due insiemi). Tale risultato deriva dalla costruzione di un ciclo algebrico in una opportuna classe di omologia della varietà algebrica reale ambiente ed è contenuto nell'articolo "Decidability of the separation problem in dimension 2".

Mi sono interessato poi allo spettro reale degli anelli di funzioni che si possono definire su una varietà algebrica affine (funzioni regolari, germi di funzioni analitiche, funzioni C^∞). Lo spettro reale di tali anelli, che è l'analogo dello spettro di Zariski delle algebre su un corpo algebricamente chiuso, è costituito dai possibili ordinamenti dei campi residui dell'anello e permette di dare una caratterizzazione algebrica a molti problemi di geometria reale, tra i quali ad esempio il problema della separazione di due insiemi a cui ho già accennato. In particolare ho dimostrato una condizione necessaria e sufficiente perché due germi semialgebrici che sono separabili tramite un germe analitico siano separabili anche mediante un polinomio, il che si traduce in un criterio che discrimini quando uno spazio finito di ordini (che è un tipo di sottospazio dello spettro reale) si può estendere dallo spettro dell'anello delle funzioni regolari a quello dei germi di funzioni analitiche in un punto della varietà; questo risultato è contenuto nell'articolo "Algebraic and analytic finite spaces of orderings".

Ambedue questi risultati hanno delle ricadute geometriche grazie al fatto che la corrispondenza tra semialgebrici (o germi semianalitici) della varietà e definibili dello spettro di funzioni (o germi di funzioni) è fedele; una caratteristica nota come "proprietà di Artin-Lang". Se però l'anello delle funzioni regolari o quello dei germi di funzioni analitiche godono di tale proprietà, altrettanto non può dirsi dell'anello dei germi di funzioni C^∞ , caso in cui è facile costruire esplicitamente dei controesempi. La costruzione è possibile grazie a partizioni dell'unità o al ricorso ad altre funzioni

“piatte”, cioè dallo sviluppo di Taylor identicamente nullo, ma non nulle. Ho cercato di dare un senso matematico a questo fatto dimostrando che la corrispondenza tra germi semianalitici e definibili dello spettro è ancora valida, purché si usino funzioni C^∞ non piatte e si consideri lo spettro dell’anello delle serie formali. Tale risultato è contenuto nell’articolo “An Artin-Lang property for germs of C^∞ functions”, scritto in collaborazione con F. Broglia; in esso vengono trattate anche alcune conseguenze, come ad esempio delle condizioni perché esista un’estensione positiva alla varietà di un germe positivo su una sottovarietà.

Nella stessa linea di ricerca, è naturale chiedersi se lo stesso tipo di risultati si possa estendere anche ad una classe di funzioni quasi-analitiche. Alcuni risultati si estendono facilmente, ma altri richiedono una dimostrazione diversa da quelle già note, della quale al momento mi sto occupando.

Un altro problema classico nello stesso campo, di cui mi sto occupando in collaborazione con C. Andradás dell’Universidad Complutense di Madrid, è quello di stabilire se il luogo dei punti dove vale una proprietà come quella della separabilità abbia una struttura di insieme analitico, semianalitico o subanalitico. Ci stiamo occupando del caso della basicità (un semianalitico aperto si dice *basico* se è del tipo $\{f = 0, g_1 > 0, \dots, g_k > 0\}$). Tale problema è stato risolto nel caso semialgebrico dimostrando che il luogo dei punti dove il germe di un semialgebrico è basico è a sua volta un semialgebrico; per i semianalitici la dimostrazione passa per una opportuna desingularizzazione alla Hironaka della frontiera di Zariski dell’insieme nel punto ed una stratificazione legata non solo alle molteplicità delle componenti di tale frontiera, ma anche alla struttura locale degli spazi di ordini prima e dopo la desingularizzazione.

Nell’ambito invece delle Equazioni differenziali alle derivate parziali, in collaborazione con F. Colombini dell’Università di Pisa e J.-F. Treves della Rutgers University mi sto occupando della risolubilità locale per operatori differenziali e pseudodifferenziali non di tipo principale. Un operatore P si dice localmente risolubile in un punto x se esiste un intorno di x tale che per ogni $f \in C^\infty$ in tale intorno il problema $Pu = f$ ha una soluzione distribuzionale. Non tutti gli operatori sono localmente risolubili, come mostrò H. Lewy con un celebre controesempio nel 1957. Successivamente, la locale risolubilità fu provata per operatori di tipo principale a coefficienti analitici da Nirenberg e Treves, sotto l’ipotesi che fosse verificata una condizione (detta Ψ) sulla parte immaginaria di P ; Hörmander provò poi che anche nel caso di operatori di tipo principale a coefficienti C^∞ la condizione Ψ è necessaria per la locale risolubilità. Recentemente il problema della sufficienza della condizione Ψ è stato molto studiato per questo caso, ma il caso degli operatori non di tipo principale è quasi completamente inesplorato. Sebbene la stessa condizione Ψ debba in questo caso essere riformulata, una congettura naturale era che essa continuasse ad essere necessaria e sufficiente: nell’articolo “Solvability and Nonsolvability of Second-Order Evolution Equations”, scritto in collaborazione appunto con F. Colombini e F. Treves, abbiamo mostrato una classe di operatori per cui questo non è vero, oltre ad altre classi per cui continua a valere. Stiamo perciò cercando una nuova condizione che tenga conto anche del diverso gruppo di invarianza di un tale operatore, molto diverso da quello di un operatore di tipo principale.

Problema che interessa contemporaneamente la geometria reale e le equazioni differenziali alle derivate parziali è poi la possibilità di scrivere una funzione non negativa come quadrato o come somma di quadrati di altre funzioni di opportuna regolarità. Questa questione (che per i polinomi risale al 17° problema di Hilbert) è stata affrontata con strumenti diversi in ambedue le discipline, con risultati di Hilbert stesso, Artin, Lang, Glaeser, Fefferman, Risler, Ruiz e altri. Nel lavoro “Nonnegative Functions as Squares and Sums of Squares” si mostra come nemmeno polinomi non negativi possano in generale essere espressi come somma di quadrati di funzioni C^2 e si dà un esempio di una funzione C^∞ non negativa che non è quadrato neanche di funzioni C^1 con derivata

Hölderiana. Un interessante problema è trovare una funzione di una variabile reale, C^∞ e non negativa che non si possa scrivere come somma di quadrati di funzioni C^∞ : mi sto occupando di questo problema e di altri ad esso correlati.

Periodi di permanenza all'estero

1996	Durante lo “Special semester on Real Algebraic Geometry” ho trascorso un mese invitato dalla Louisiana State University di Baton Rouge
1997	Ho trascorso il secondo semestre a Madrid, invitato dall'Universidad Complutense
2002	Sono stato invitato all'Universidad Complutense di Madrid nel mese di febbraio
2002	Sono stato invitato alla Rutgers University di New Brunswick, New Jersey a fine ottobre

Comunicazioni a convegni e seminari

- “Semirramas formales y basicidad para conjuntos definidos por funciones C^∞ ”, durante la permanenza all'Universidad Complutense di Madrid del 1997;
- “Behaviour of smooth functions in semialgebraic and analytic geometry” durante il “Meeting of young european researchers in Real Algebraic Analytic Geometry” di giugno 1998 a Pisa;
- “An Artin-Lang property for C^∞ non-flat function germs” durante il “Workshop on Valuation Theory” dell'agosto 1999 a Saskatoon, Canada;
- “An Artin-Lang property for C^∞ functions” durante il “RAAG 2001 - Real Algebraic and Analytic Geometry” di giugno 2001 a Rennes, Francia;
- “Spazi di ordini algebrici e analitici” durante le “Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati - VI” di maggio 2002 ad Anacapri (su invito);
- “Necessary condition for the local solvability of certain pseudodifferential operators not of principal type” durante il “First Joint international Meeting A.M.S.-U.M.I.” di giugno 2002 a Pisa (su invito);
- “Problemi “di tipo Artin” in geometria reale” durante il convegno “Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse - Nuovi contributi italiani III” di settembre 2002 a Palermo;
- “Necessary condition for the local solvability of certain pseudodifferential operators not of principal type” durante il convegno “Hyperbolic Problems and Related Topics” di settembre 2002 a Cortona (su invito);
- “On local solvability of certain operators not of principal type” durante lo “Tsukuba Symposium 2003” di febbraio 2003 a Tsukuba, Giappone (su invito);
- “Representing semialgebraic sets by elements of a bigger function ring” all'interno del Bimestre su “Argomenti di geometria reale e complessa” della primavera 2003 a Pisa;
- “Local solvability of certain operators not of principal type” durante “Phase Space Analysis of PDE” a Bertinoro nel novembre 2003 (su invito);

- sono stato invitato a tenere una conferenza al convegno “PDE’s and Mathematical Physics” a Parigi nel dicembre 2003.

Organizzazione di convegni

Faccio parte del comitato organizzatore del Trimestre di “Phase Space Analysis of Partial Differential Equations” avente luogo presso il Centro “E. De Giorgi” a Pisa dal 15 febbraio al 15 maggio 2004.

Partecipazioni ad altri convegni e a scuole

- “Algebraic and Analytic Geometry” tenutosi a Luminy, Francia nel periodo 12-16 settembre 1994;
- “Real Algebraic and Analytic Geometry meeting” tenutosi a Segovia, Spagna nel periodo 26-30 giugno 1995;
- “Special semester on Real Algebraic Geometry” tenutosi a Baton Rouge, Louisiana nel periodo febbraio-aprile 1996;
- “Working week on Resolution of Singularities” tenutasi ad Obergurgl, Austria nel settembre 1997;
- “HCM Workshop on Spectral spaces in real and p-adic geometry” tenutosi a Dortmund, Germania nel settembre 1997;
- “Conference on Real Analytic and Algebraic Geometry - RAAG98” tenutasi a Levico, Italia nel settembre 1998;
- “Summer School on Real Algebraic Geometry” tenutasi a Levico, Italia nel giugno 2000;
- “International Workshop on Real Geometry” tenutosi a Madrid, Spagna nel dicembre 2001;
- “Reelle Algebraische und Analytische Geometrie” tenutosi ad Oberwolfach, Germania nel marzo 2002;
- “Winter School and Conference on Real Algebraic and Analytic Geometry and Motivic Integration” tenutasi ad Aussois, Francia nel gennaio 2003;
- “Real Algebra” tenutosi a Dortmund, Germania nell’ottobre 2003.

Attività didattica

- Esercitazioni del corso di Geometria I (doc. F. Acquistapace) presso il Dipartimento di Matematica di Pisa nell’anno 1996;
- esercitazioni del corso di Analisi Complessa (doc. M. Abate) presso l’Istituto Nazionale di Alta Matematica di Roma nel primo semestre dell’anno 1997;
- esercitazioni del corso di Geometria I (doc. P. Conti) presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa nell’anno accademico 1998/99;

- esercitazioni del corso di Geometria II (doc. P. Lisca) presso il Dipartimento di Matematica di Pisa nell'anno 1999/2000;
- esercitazioni del corso di Matematica per l'Ingegneria (doc. P. Conti) presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa nell'anno accademico 1999/2000;
- esercitazioni del corso di Geometria II (doc. M. Nacinovich) presso il Dipartimento di Matematica di Pisa nell'anno 2000/2001;
- esercitazioni del corso di Linguaggio e Metodi della Matematica (doc. C. Traverso) presso il Corso di Laurea in Informatica dell'Università di Pisa nell'anno accademico 2001/2002;
- esercitazioni del corso di Matematica II (doc. P. Conti) presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa nell'anno accademico 2001/2002;
- esercitazioni del corso di Algebra lineare (doc. G. Pirola) dei Consigli Didattici di Matematica e Fisica nell'anno accademico 2002/2003;
- parte del corso di Geometria Superiore del Consiglio Didattico di Matematica nell'anno accademico 2002/2003.

Lingue conosciute

Ho una conoscenza molto buona dell'inglese, buona dello spagnolo e del francese, elementare del tedesco.

Titoli posseduti

- Certificate of Proficiency in English;
- Diploma di Maturità Classica presso il Liceo Ginnasio Statale Giulio Cesare di Roma, nell'anno 1989/90, con la votazione di 60/60;
- Laurea in Matematica il 14 luglio 1994 presso l'Università degli Studi di Pisa con una tesi dal titolo *Problemi di separazione in dimensione due*, relatore il Prof. F. Broglia, con la votazione di 110/110 e lode e una tesina orale dal titolo *Spettro dell'Hamiltoniana per potenziali periodici unidimensionali*, relatore il Prof. L. E. Picasso, votazione 30/30;
- Diploma della Scuola Normale Superiore di Pisa;
- Diploma di Perfezionamento della Scuola Normale Superiore di Pisa.

Pubblicazioni

- L. Pernazza: Decidability of the Separation Problem in dimension 2 *Annali dell'Università di Ferrara, Sezione VII - Scienze Matematiche*, Vol. XLI (1995), pp. 85–93;
- F. Broglia, L. Pernazza: “An Artin-Lang property for germs of C^∞ functions”, *J. Reine Angew. Math.* 548 (2002), pp. 129–147;

- L. Pernazza: “Algebraic and analytic finite spaces of orderings”, J. Pure and Appl. Algebra 188 (2004), pp. 189-215;
- C. Andradas, L. Pernazza: “On the semianalyticity of certain loci”, Preprint del Dipartimento di Matematica dell’Università di Pisa, Sezione di Geometria e Algebra, n. 1.277.1401 (Giugno 2002);
- F. Colombini, L. Pernazza, F. Treves: “Solvability and Nonsolvability of Second-Order Evolution Equations”, nei Proceedings of the Cortona Conference, Graduate Series in Analysis, International Press, Somerville 2003;
- J.-M. Bony, F. Broglia, F. Colombini, L. Pernazza: “Nonnegative Functions as Squares or Sums of Squares”, inviato per la pubblicazione ai Proceedings of the American Mathematical Society.